المحاضرة الثالثة

$$Var.(U_i) = E\left(U_i\right)^2 = \sigma^2 U$$

- **خاصية التوزيع الطبيعي للمتغير (U_i)**

المقصود بهذه الفرضية هو ان توزيع قيم (U_i) حول القيمة المتوقعة، والمفترض انها تساوي صفراً يكون على شكل جرس Bell-shaped symmetrical distribution لكل قيمة لـ (X).
ان هذا الافتراض يعني ضمنياً ان القيم الصغيرة لـ (U_I) تحدث باحتمالية أكبر من احتمالية حدوث القيم الكبيرة، ويعد هذا الافتراض من الافتراضات المهمة للغاية لبناء الاختبارات الاحصائية، وعمل قياسات لفترات الثقة. وعند عدم تحقق هذا الافتراض، وعلى الرغم من بقاء مقدرات المربعات الصغرى غير متحيزة ولها اصغر تبايناً ، الا ان تلك المقدرات لا تستوفي الصلاحيات الاحصائية لإجراء اختبارات مثل (χ^2 , F , T)) لكون هذه الاختبارات تبنى على التوزيع الطبيعي.

- **الاستقلالية المتسلسلة للأخطاء العشوائية serial Independence**

ان القيم المختلفة لـ (U_i) تكون مستقلة بعضها عن البعض الاخر، وان هذا يعني ان التباينات المشتركة لـ (U_i) مع (U_j) مساوية للصفر، ومن ثم فان قيمة المتغير العشوائي في مدة معينة، لا تعتمد على قيمته في مدة اخرى. ورياضياً فان هذه العلاقة تأخذ الصيغة الاتية:

$$Cov.(U_i U_j) = 0 \quad (i , j = 1,2\ldots\ldots n \quad , i \neq j)$$

ومن هذا يتبين ان هناك حالة انعدام للارتباط بين القيمة الجارية للمتغير المحذوف الواقع في (U) مع القيمة الماضية لنفس المتغير، وفي حالة وجود مخالفة لهذا الافتراض تظهر لنا مشكلة الارتباط الذاتي Auto-correlation.

- **قيم U_i غير مرتبطة باي من المتغيرات المستقلة**

المقصود بهذه الفرضية هو انعدام التباينات المشتركة بين (X's),(U's) وان توزيع قيم (X) مستقلاً عن توزيع قيم (U) أي ان :

$$\text{Cov. (XU)} = E\ \{[X_i - E(X_i)][U_i - E(U_i)]\} = 0$$

من هذا يتبين ان المصفوفة (X) ليست تصادفية، بمعنى انها تتوزع توزيعاً مستقلاً عن توزيع (U) ضمنياً هذا الافتراض يعني ان قيم (X) تبقى ثابتة Fixed وان الذي يتغير هو المتغير التابع (Y) نتيجة لاختلاف U ، بمعنى انه عندما نسحب عينات متتالية من المجتمع الاحصائي ، فان الذي يؤثر على الاختلاف في قيم (Y) هو المتغير العشوائي (U) فقط .

إضافة الى ذلك فان هناك افتراضات اخرى لا تقل اهمية عما سبقها، الا ان تلك الافتراضات مطلوب تحديدها قبل البدء بتقدير الانموذج، منها المتعلق بتشخيص Identification العلاقة المدروسة عندما يكون لدينا انموذج هيكلي يتكون من عدة معادلات، وآخر بعدم وجود اخطاء القياس Measurement Errors في المتغيرات المستقلة، وافتراض عدم وجود اخطاء التجميع Aggregation Errors التي قد يقع بها الباحث عند معالجة بياناته احصائياً. وافتراض صحة الصياغة Specification للأنموذج، والتي تمثل اولى واهم مراحل بناء الأنموذج والبحث في تحليل الانحدار.

٣. طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية في التقدير Ordinary least square

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات الانحدار بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البواقي (Residuals) إلى أدنى قيمه لها.
ولتوضيح طرقة المربعات الصغرى الاعتيادية، نفرض لدينا نموذج الانحدار الخطي البسيط التالي: -

$$Y_i = \alpha + \beta X + u_i$$

ولغرض الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أولا ايجاد مجموع مربعات البواقي $\sum u^2$ وكما يلي: -

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)^2$$

وبعد ذلك يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي أصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. وذلك باستخدام التفاضل الجزئي بالنسبة للمجاهيل α, β حيث نحصل على :-

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial \hat{\alpha}} = (2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(-1) \qquad \text{---------------} \ (3)$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial \hat{\beta}} = (2)(\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(-X) \qquad \text{---------------} \ (4)$$

وبجعل المشتقة الاولى للمعادلة (3) مساوية الى الصفر: -

$$(-2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X) = 0$$

$$\sum Y_i - \sum_i \hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum_i X = 0$$

$$\sum_i \hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta} \sum_i X$$

$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta} \sum_i X$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta} \frac{\sum_i X}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta} \overline{X} \qquad \text{------------------} \ (5)$$

وتسمى المعادلة (5) بالمعادلة الطبيعية الاولى.
وبمفاضلة المعادلة (4) بالنسبة للمعلمة β وجعل المشتقة مساوية الى الصفر، نحصل على: -

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial \hat{\beta}} = (2)(\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(-X) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum X (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X) = 0$$

$$(\sum X (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X) = 0$$

$$-\sum XY + \sum X \alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

$$\sum XY = \alpha^{\wedge} \sum X + \beta^{\wedge} \sum X^2 \qquad \text{------------------} \ (6)$$

وتسمى المعادلة (6) بالمعادلة الطبيعية الثانية.
وبحل المعادلتين الطبيعيتين (5)، (6) نحصل على طرق قياسية لتقدير معالم النموذج. وكما يلي:

- ✓ نقوم بتعويض قيمة α " والتي تم الحصول عليها من المعادلة (5) " وذلك بالمعادلة (6) حيث نحصل على: -

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta\sum X^2$$

- ✓ بالضرب في n ينتج ان :-

$$n\sum XY = \sum X\sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$
$$n\sum XY - \sum X\sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$
$$= \beta\ n\sum X^2 - \beta(\sum X)^2$$
$$= \beta\left(n\sum X^2 - (\sum X)^2\right)$$

ولذلك يكون: -

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

وهنالك طريقة اخرى يمكن الحصول من خلالها على المقدرات وذلك باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum\ y_i = \sum(Y - \overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$
$$\sum xy = \sum(X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$
$$\sum x^2 = \sum(X - \overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

ولكن

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i(\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\,\overline{Y} - \hat{\beta}n\overline{X}\,\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\,\overline{Y} = -\hat{\beta}n\overline{X}\,\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta}n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$
$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$
$$\sum xy = \beta\sum x^2$$
$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$